

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Динамические системы
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Космические технологии Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра математического моделирования и прикладной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Дифференцированный зачет

2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 150 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Программу составили:

С.П. Трофимов, канд. физ.-мат. наук, ассистент

М.Г. Широбоков, ассистент

Программа обсуждена на заседании кафедры математического моделирования и прикладной математики
01.04.2024

Аннотация

Курс "Динамические системы" знакомит студентов с основами теории динамических систем и их приложениями в различных областях. В ходе курса рассматриваются основные понятия и методы анализа динамических систем, такие как устойчивость, предельные циклы, бифуркации, фазовые портреты и другие. Студенты изучают математические модели динамических систем и их поведение во времени, а также применяют полученные знания для решения задач из различных областей, таких как физика, биология, экономика и техника. Курс также охватывает современные методы численного моделирования и анализа динамических систем.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение студентами основных понятий и методов в одной из фундаментальных областей современной математики – теории динамических систем, задаваемых обыкновенными дифференциальными уравнениями на многообразиях, изучение способов применения этих понятий и результатов теории в практической работе по нахождению и исследованию движений механических систем, описываемых дифференциальными уравнениями.

Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области таких разделов математики, как топология многообразий, качественные и асимптотические методы исследования решений ОДУ;
- обучение студентов возможностям применения концептуального и методического аппаратов современной теории для анализа и интерпретации данных, получаемых другими, в частности численными методами решения ОДУ;
- формирование более общих и рациональных подходов к выполнению студентами исследований в области анализа и управления движениями космических объектов в рамках выпускных работ на степень магистра.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)
	ПК-3.2 Способен проводить эксперимент (моделирование) с использованием исследовательского оборудования (пакетов прикладных программ)
	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- место и роль общих вопросов науки в научных исследованиях;
- современные проблемы математики и механики;
- методический аппарат аналитической механики и способы его приложения к реальным объектам;
- принципы симметрии и законы сохранения;
- новейшие открытия естествознания;
- о взаимосвязях и фундаментальном единстве естественных наук.

уметь:

- эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы;
- представить панораму универсальных методов и законов современного естествознания;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций.

владеть:

- научной картиной мира;
- математическим моделированием физических задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Топологическое введение в теорию непрерывных динамических систем	10	5		15
2	Основные понятия теории непрерывных динамических систем	10	5		15
3	Предельные множества движений динамических систем	10	5		15
4	Неблуждающие и блуждающие множества динамических систем	10	5		15
5	Линейные системы с постоянными коэффициентами, как интегрируемые системы	10	5		15
6	Понятие об эквивалентности динамических систем	10	5		15
7	Топологическое строение динамических систем в окрестности неподвижной точки		5		10
8	Простейшие случаи глобальной эквивалентности динамических систем		5		10
9	Постановки задач теории бифуркаций		5		10
10	Бифуркации положений равновесия		5		10
11	Бифуркации периодических движений		5		10
12	Нелокальные бифуркации в системах на плоскости		5		10

Итого часов	60	60		150
Подготовка к экзамену	0 час.			
Общая трудоёмкость	270 час., 6 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Топологическое введение в теорию непрерывных динамических систем

Основные топологические понятия

Множества и отображения. Введение топологии в множество. Топологические пространства. Открытые и замкнутые множества. Окрестность, внутренность, граница, замыкание множества. Компактность.

Отображения, гомеоморфизмы

Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы. Топологическая эквивалентность пространств.

Многообразия

Определение многообразия. Размерность. Примеры многообразий. Локальные карты и атлас многообразия. Функции замены переменных. Гладкие многообразия. Связные многообразия. Классификация по размерности. Одномерные многообразия.

Обзор простейших видов многообразий

Связные двумерные многообразия. Компактные двумерные многообразия, ориентируемые и неориентируемые многообразия. Примеры многообразий высших размерностей: сферы, цилиндры, торы. Прямые произведения многообразий. Проективное пространство и некоторые его свойства.

Касательное расслоение и векторные поля на многообразии

Гладкие многообразия. Диффеоморфизмы. Касательный вектор и касательное пространство в точке многообразия. Касательное расслоение многообразия. Векторное поле на многообразии как обобщение системы дифференциальных уравнений.

2. Основные понятия теории непрерывных динамических систем

Динамическая система, как однопараметрическая группа преобразований пространства состояний. Непрерывные динамические системы (потoki), определяемые векторными полями на многообразиях. Оператор потока. Оператор сдвига по траекториям. Основные свойства траекторий. Простейшие динамические системы: покой, простой сдвиг, поворот, гиперболический поворот. Топологическая классификация траекторий динамических систем. Неподвижные точки, замкнутые траектории (циклы), незамкнутые траектории. Периодические движения.

Инвариантные множества динамических систем.

Инвариантные множества динамических систем. Основные свойства. Замкнутые инвариантные множества. Ограничение динамической системы на инвариантное множество.

3. Предельные множества движений динамических систем

Основные свойства

Предельные точки и предельные множества движений динамических систем. Инвариантность и замкнутость предельных множеств. Непустота и связность предельных множеств движения на компакте.

Классификация полутраекторий

Классификация полутраекторий динамических систем по свойствам их предельных множеств. Неподвижные точки, периодические, уходящие и асимптотические движения. Движения, устойчивые по Пуассону.

Предельные множества движений на сфере и плоскости

Основные свойства движений, устойчивых по Пуассону. Динамически предельные множества движений на сфере и плоскости. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.

Динамические системы на торе

Динамические системы на торе. Обмотки тора. Приведение к дискретной динамической системе на окружности. Число вращения. Рациональные и иррациональные обмотки тора. Иррациональная обмотка тора как пример движения, устойчивого по Пуассону.

4. Неблуждающие и блуждающие множества динамических систем

Свойства неблуждающего множества

Аттракторы и репеллеры. Неблуждающие и блуждающие точки и множества динамических систем. Основные свойства неблуждающего множества: симметрия по времени, инвариантность, замкнутость. Связь неблуждающего множества динамической системы с предельными множествами ее движений, Центральное множество динамической системы. Теорема Биркгофа о центре.

Устойчивые по Ляпунову инвариантные множества динамических систем.

Устойчивые по Ляпунову инвариантные множества динамической системы. Асимптотически устойчивые компактные множества – аттракторы. Репеллеры. Области притяжения аттракторов и репеллеров, их свойства.

5. Линейные системы с постоянными коэффициентами, как интегрируемых систем

Решение линейных систем

Линейные системы с постоянными коэффициентами. Фундаментальная матрица системы. Экспонента матрицы. Общий вид решения линейной системы с постоянными коэффициентами. Алгебраическая классификация двумерных линейных систем.

Инвариантные множества линейных систем

Разложение фазового пространства линейной системы на инвариантные подпространства. Гиперболические линейные системы. Устойчивое и неустойчивое подпространства гиперболических систем. Центральные линейные системы. Инвариантные торы в центральных системах.

Линейные системы с периодическими коэффициентами

Линейные системы с периодическими коэффициентами. Фундаментальная матрица системы. Матрица монодромии. Мультипликаторы. Выделение периодической части решения.

Теорема Флоке-Ляпунова

Теорема Флоке-Ляпунова о приведении системы с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами.

6. Понятие об эквивалентности динамических систем

Понятие об эквивалентности динамических систем. Эквивалентность динамических систем в окрестности неособой точки. Теорема о выпрямлении траекторий. Линейная, гладкая и топологическая эквивалентности линейных систем. Топологическая классификация линейных систем.

Симметрии динамических систем. Дискретные группы симметрий. Симметрии с обращением времени. Обратимые системы. Непрерывные группы симметрий. Коммутирующие потоки. Группы симметрий, порожденные коммутирующими потоками. Понижение порядка системы при наличии непрерывной группы симметрий.

7. Топологическое строение динамических систем в окрестности неподвижной точки

Локальная эквивалентность динамических систем.

Линеаризация динамической системы в окрестности неподвижной точки. Локальная эквивалентность нелинейной и линеаризованной систем: теорема о Гробмана-Хартмана линеаризации. Топологическая классификация гиперболических неподвижных точек. Строение нелинейной системы в окрестности неподвижной точки. Гиперболическое и центральное инвариантные многообразия. Теорема Адамара-Перрона об инвариантных многообразиях. Теорема о центральном многообразии.

8. Простейшие случаи глобальной эквивалентности динамических систем

Некоторые результаты о глобальной эквивалентности динамических систем. Системы с конечным числом неподвижных точек на окружности. Специальные потоки без неподвижных точек на торе. Сведение их к диффеоморфизмам окружности. Классификация Пуанкаре.

9. Постановки задач теории бифуркаций

Постановки задач теории бифуркаций. Проблема классификации бифуркаций. Бифуркации положений равновесия. Сведение к задаче на центральном многообразии.

10. Бифуркации положений равновесия

Однопараметрические бифуркации положений равновесия

Двухпараметрические бифуркации положений равновесия. Однопараметрические бифуркации положений равновесия. Случай нулевого собственного значения. Рождение и исчезновение пары неподвижных точек. Бифуркация для нулевого собственного значения в системе с симметрией. Случай пары чисто мнимых корней. Рождение цикла. Мягкая и жесткая потеря устойчивости.

Двухпараметрические бифуркации положений равновесия.

Двукратно вырожденная неподвижная точка одномерной системы. Сборка Уитни. Двухпараметрическая бифуркация в случае двух нулевых собственных значений.

11. Бифуркации периодических движений

Бифуркации периодических движений при мультипликаторе, равном 1

Бифуркации при мультипликаторе, равном -1

Бифуркации предельных циклов. Отображение в сечении Пуанкаре. Мультипликаторы отображения. Критические случаи. Бифуркация цикла при мультипликаторе, равном 1. Рождение и исчезновение пары предельных циклов.

Удвоение периода. Универсальность Фейгенбаума.

12. Нелокальные бифуркации в системах на плоскости

Нелокальные бифуркации в системах на плоскости. Появление и распад седловой связки. Рождение цикла из гомоклинической траектории седло-узла. Рождение предельного цикла из петли сепаратрисы.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Аудитория с проектором.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд .— 5-е изд., стереотип. — М. : Эдиториал УРСС, 2003 .— 416 с.
2. Математический анализ [Текст] : в 2 ч. : учебник для вузов / В. А. Зорич .— 5-е изд. — М. : МЦНМО, 2007 .— Ч.2. - 794 с.
1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002, 414 с.
2. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2000, 400 с.
3. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений. — М.: МЦНМО, 2005. — 464 с.

Дополнительная литература

Журналы издательств Springer, Elsevier, AMS

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://scitation.aip.org/>, <http://www.sciencemag.org/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Необходимое программное обеспечение: программный пакет MATLAB®

Обеспечение самостоятельной работы: электронные ресурсы, в том числе веб-сайт ИПИМ им.

М.В. Келдыша РАН (<http://www.keldysh.ru>), базы журналов издательств Springer, Elsevier, AMS

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Космические технологии Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра математического моделирования и прикладной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчики:

С.П. Трофимов, канд. физ.-мат. наук, ассистент
М.Г. Широбоков, ассистент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)
	ПК-3.2 Способен проводить эксперимент (моделирование) с использованием исследовательского оборудования (пакетов прикладных программ)
	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Динамические системы» обучающийся должен:

знать:

- место и роль общих вопросов науки в научных исследованиях;
- современные проблемы математики и механики;
- методический аппарат аналитической механики и способы его приложения к реальным объектам;
- принципы симметрии и законы сохранения;
- новейшие открытия естествознания;
- о взаимосвязях и фундаментальном единстве естественных наук.

уметь:

- эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы;
- представить панораму универсальных методов и законов современного естествознания;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций.

владеть:

- научной картиной мира;
- математическим моделированием физических задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачёта в 9 семестре:

1. Пространство состояний системы состоит из N элементов. Сколько различных динамических систем может существовать на таком пространстве?
2. Основные понятия, связанные с множествами и отображениями.
3. Каково минимальное число открытых множеств в топологическом пространстве?
4. Может ли подмножество топологического пространства быть ни открытым, ни замкнутым? А открытым и замкнутым?
5. Если отображение непрерывно и биективно, то всегда ли оно гомеоморфно?
6. Приведите пример некомпактного, но ограниченного одномерного многообразия.
7. Всегда ли связно линейно связное множество?
8. Построить атлас двумерного цилиндра.
9. Докажите, что существует бесконечное множество одномерных компактных многообразий.
10. Опишите классификацию двумерных связных компактных многообразий.
11. Докажите ассоциативность прямого произведения многообразий.
12. Какому многообразию гомеоморфно проективное пространство?
13. Всегда ли касательное расслоение n - v многообразия M гомеоморфно прямому произведению?
14. Если траектории двух движений имеют общую точку, то движения совпадают. Доказать.
15. Описать все инвариантные множества простого сдвига.

Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачёта в 10 семестре:

1. Основные виды эквивалентности динамических систем.
2. Сходство и различие понятий сопряженности и орбитальной эквивалентности.
3. Привести примеры дискретной группы симметрий динамических систем.
4. Примеры тривиальных непрерывных групп симметрий динамических систем.
5. Формулировка теоремы о выпрямлении траекторий.
6. Гиперболические и центральные линейные системы.
7. Всегда ли динамическая система локально эквивалентна линеаризованной в окрестности неподвижной точки?
8. Какова степень гладкости инвариантных многообразий в окрестности неподвижной точки?
9. Может ли существовать двухпараметрическая бифуркация в одномерной системе? А однопараметрическая в двумерной?
10. Что такое бифуркация смены устойчивости?
11. Сборка Уитни как бифуркационная диаграмма динамической системы.
12. Основные этапы исследования двухпараметрической бифуркации для двух нулевых собственных значений.
13. Рождение и исчезновение предельных циклов при бифуркации.
14. Условия возникновения бифуркации удвоения периода.
15. Общее представление о последовательности бифуркаций удвоения периода. Сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Дифференцированный зачёт может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме